

E I M E I オリジナル 北辰テスト予想問題 第3回 数学

解答・解説

1 計算・小問集合

(1) 答え $3x + 5y$ 4点

かっこを外して、同類項をまとめます。

$$\begin{aligned}4x - 3y - (x - 8y) &= 4x - 3y - x + 8y \\&= (4x - x) + (-3y + 8y) \\&= 3x + 5y\end{aligned}$$

かっこを外すときに、 $-(-8y)$ が $+8y$ になる符号の変化に注意しましょう。

(2) 答え -2 4点

累乗の計算と割り算を先に行います。

- 累乗の計算:

$$(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$$

- 割り算の計算:

$$18 \div (-3) = -6$$

これらを元の式に代入して計算します。

$$\begin{aligned}(-2)^3 - 18 \div (-3) &= -8 - (-6) \\&= -8 + 6 \\&= -2\end{aligned}$$

負の数の累乗や、引き算と割り算の優先順位に注意して計算しましょう。

(3)

答え $-6a^2$

4点

乗除の混ざった計算は、分数の形にまとめてから約分を行うとミスを防げます。

$$\begin{aligned} 12a^2b \times (-3ab^2) \div 6ab^3 &= \frac{12a^2b \times (-3ab^2)}{6ab^3} \\ &= \frac{-36a^3b^3}{6ab^3} \\ &= -6a^2 \end{aligned}$$

符号の決定、係数の計算、文字の指数の計算をそれぞれ丁寧に行いましょう。

(4)

答え $\sqrt{5}$

4点

各項を整理してから計算します。

- $\sqrt{45}$ の変形:

$$\sqrt{45} = \sqrt{9 \times 5} = 3\sqrt{5}$$

- $\frac{10}{\sqrt{5}}$ の分母の有理化:

$$\frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{10 \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}$$

これらを引き算します。

$$\begin{aligned} \sqrt{45} - \frac{10}{\sqrt{5}} &= 3\sqrt{5} - 2\sqrt{5} \\ &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

(5)

答え $(x-6)(x+4)$

4点

「かけて -24 、たして -2 」になる2つの数を見つけます。

積が -24 になる2数の組み合わせのうち、和が -2 になるものは -6 と $+4$ です。
したがって、次のように因数分解できます。

$$x^2 - 2x - 24 = (x-6)(x+4)$$

(6)

答え $x = 2, y = -3$

4点

加減法または代入法で解きます。ここでは加減法（ y の係数を揃える）で解きます。

上の式を①、下の式を②とします。

$$\begin{cases} 3x - 2y = 12 & \dots \textcircled{1} \\ 4x + y = 5 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

②の両辺を2倍します。

$$8x + 2y = 10 \quad \dots \textcircled{2}'$$

①と②'を足し合わせて y を消去します。

$$\begin{aligned} (3x - 2y) + (8x + 2y) &= 12 + 10 \\ 11x &= 22 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

$x = 2$ を②に代入します。

$$\begin{aligned} 4 \times 2 + y &= 5 \\ 8 + y &= 5 \\ y &= -3 \end{aligned}$$

よって、求める解は $x = 2, y = -3$ となります。

(7)

答え 80 度

4点

平行線の錯角を使います。

点 P を通り、2直線 l, m に平行な直線 n を引きます。

直線 n は l と m とともに平行なので、錯角は等しくなります。

- l と線分 AP がつくる 50° の角の錯角より、 n と AP がつくる角も 50°
- m と線分 BP がつくる 30° の角の錯角より、 n と BP がつくる角も 30°

$\angle x$ はこの2つの角の和なので、

$$\angle x = 50^\circ + 30^\circ = 80^\circ$$

(8)

答え $y = -3x + 5$

4点

平行な2つの直線は傾きが等しくなります。

- 求める直線の傾きは、平行な直線 $y = -3x + 2$ の傾きと同じなので -3 です。

よって、求める直線の式は次のようにおくことができます。

$$y = -3x + b \quad (b \text{ は切片})$$

- この直線が点 $(2, -1)$ を通るので、式に $x = 2, y = -1$ を代入して b を求めます。

$$-1 = -3 \times 2 + b$$

$$-1 = -6 + b$$

$$b = 5$$

したがって、求める直線の式は $y = -3x + 5$ です。

(9)

答え $72\pi \text{ cm}^3$

4点

柱体の体積は「底面積 $\times$ 高さ」で求めることができます。

- 底面積を求める

底面は半径 3 cm の円なので、その面積 S は、

$$S = \pi \times 3^2 = 9\pi \text{ cm}^2$$

- 体積を求める

高さが 8 cm なので、体積 V は、

$$V = 9\pi \times 8 = 72\pi \text{ cm}^3$$

したがって、円柱の体積は $72\pi \text{ cm}^3$ です。

(10)

答え 22.5 m

4点

度数の合計は $3 + 5 + 8 + 4 = 20$ 人です。中央値は値の小さい方から 10 番目と 11 番目の記録の平均が含まれる階級にあります。

各階級までの累積度数は、

10～15:3人、15～20:3 + 5 = 8人、20～25:8 + 8 = 16人 となります。

10番目と 11番目はどちらも累積度数が 8 を超え 16 以下なので、20 以上 25 未満の階級に入ります。

この階級の階級値は、

$$\frac{20 + 25}{2} = 22.5 \text{ m}$$

(11)①

答え $\frac{2000-x}{120}$ 分

3点

本屋から学校までの道のりと、走った速さから時間を表す式をつくります。

- 本屋から学校までの道のりを表す

家から学校までの全体の道のりは 2000 m で、家から本屋までの道のりは x m です。

したがって、本屋から学校までの道のりは、全体の道のりから歩いた道のりを引いた残りになります。

$$(\text{本屋から学校までの道のり}) = 2000 - x \text{ (m)}$$

- 走った時間を表す

本屋から学校までは毎分 120 m の速さで走ったので、かかった時間は「道のり ÷ 速さ」より、

$$\frac{2000 - x}{120} \text{ (分)}$$

となります。

(11)②

答え 560 m

3点

「歩いた時間」と「走った時間」の合計が 20 分であることから方程式を立てて解きます。

• 歩いた時間を表す

家から本屋までは x m を毎分 70 m の速さで歩いたので、かかった時間は、

$$\frac{x}{70} \text{ (分)}$$

• 方程式を立てる

歩いた時間と走った時間の合計が 20 分なので、

$$\frac{x}{70} + \frac{2000 - x}{120} = 20$$

• 方程式を解く

両辺に分母の最小公倍数である 840 をかけます。

$$12x + 7(2000 - x) = 20 \times 840$$

$$12x + 14000 - 7x = 16800$$

$$5x = 16800 - 14000$$

$$5x = 2800$$

$$x = 560$$

$x = 560$ は問題に適しています。

したがって、家から本屋までの道のりは 560 m です。

2 小問集合

(1)

答え 辺 DC を C の方向に延長し、 $CD = CD'$ となる点 D' を半直線 DC 上にとる。点 A と D' を直線で結び、辺 BC との交点を P とする作図。

5点

2点 A, D と直線 BC があり、 BC 上の点 P に対して $AP + PD$ を最小にするには、一方の点（ここでは D ）を直線 BC に関して対称移動させた点 D' をとります。

このとき、 $PD = PD'$ となるため、 $AP + PD = AP + PD'$ となります。

$AP + PD'$ が最小になるのは、3点 A, P, D' が一直線上に並ぶときです。したがって、 A と D' を結んだ直線と BC の交点が求める点 P となります。

【作図の手順】

- 辺 DC を C の方向にまっすぐ延ばします。
- コンパスの針を C にあわせ、 CD の長さを半径とする円（または弧）をかき、延ばした線との交点を D' とします。
- 定規を使って点 A と点 D' を結び、辺 BC と交わった点を P とします。

(2)

答え 3

4点

$\sqrt{180-12n}$ が自然数となる条件を考えます。

まず、根号の中身を因数分解して整理します。

$$180 - 12n = 12(15 - n) = 2^2 \times 3 \times (15 - n)$$

これが自然数の2乗（平方数）になれば、根号が外れて自然数になります。

素因数分解したときの各素因数の指数がすべて偶数になればよいので、すでに 2^2 （偶数乗）があることから、残りの $3 \times (15 - n)$ が平方数になればよいことがわかります。

したがって、 $15 - n = 3 \times k^2$ （ k は 1 以上の整数）と表せます。

（ $\sqrt{180-12n}$ が自然数となるため、 $180 - 12n > 0$ すなわち $15 - n > 0$ であることから、 $k \geq 1$ です）

k に具体的な自然数を代入して、自然数 n を求めます。

・ $k = 1$ のとき

$$15 - n = 3 \times 1^2 = 3 \implies n = 12$$

・ $k = 2$ のとき

$$15 - n = 3 \times 2^2 = 12 \implies n = 3$$

・ $k = 3$ のとき

$$15 - n = 3 \times 3^2 = 27 \implies n = -12 \quad (n \text{ は自然数なので不適})$$

これより、条件を満たす自然数 n は $n = 3, 12$ です。

このうち「最も小さい自然数」を求めるので、答えは 3 となります。

（検算： $n = 3$ のとき、 $\sqrt{180 - 36} = \sqrt{144} = 12$ となり、確かに自然数になります）

(3)

答え $\frac{2}{9}$

4点

大小2つのさいころを投げるとき、目の出方は全部で $6 \times 6 = 36$ 通りあります。

$\sqrt{ab}$ が有理数（この場合は整数）となるのは、根号の中身 ab が平方数（整数の2乗）になるときです。
 a, b は 1 から 6 までの自然数なので、積 ab が平方数になる組 (a, b) を書き出して数え上げます。

- ・ $ab = 1$ のとき： $(1, 1)$ （1 通り）
- ・ $ab = 4$ のとき： $(1, 4), (2, 2), (4, 1)$ （3 通り）
- ・ $ab = 9$ のとき： $(3, 3)$ （1 通り）
- ・ $ab = 16$ のとき： $(4, 4)$ （1 通り）
- ・ $ab = 25$ のとき： $(5, 5)$ （1 通り）
- ・ $ab = 36$ のとき： $(6, 6)$ （1 通り）

これらを合計すると、 $1 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1 = 8$ 通りあります。

したがって、求める確率は、

$$\frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

(4)

答え 24π

4点

二等辺三角形 ABC を、対称軸である AH を軸として 1 回転させると、底面の半径が BH 、母線の長さが AB の「円錐」ができます。

二等辺三角形の頂点から底辺に下ろした垂線は、底辺を 2 等分するので、

$$BH = BC \div 2 = 6 \div 2 = 3 \text{ (cm)}$$

となります。

また、母線の長さは $AB = 5 \text{ cm}$ です。

この円錐の表面積は、「底面積」と「側面積」の和で求められます。

- 底面積

底面は半径 3 cm の円なので、

$$\text{底面積} = \pi \times 3^2 = 9\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

- 側面積

側面の展開図はおうぎ形になります。

おうぎ形の半径（円錐の母線）は 5 cm 、弧の長さは底面の円周に等しく $2\pi \times 3 = 6\pi \text{ (cm)}$ です。

側面積は $\frac{1}{2} \times \text{弧の長さ} \times \text{半径}$ で求められるので、

$$\text{側面積} = \frac{1}{2} \times 6\pi \times 5 = 15\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

(※公式 側面積 $= \pi \times \text{母線} \times \text{底面の半径} = \pi \times 5 \times 3 = 15\pi$ を用いても同様です)

- 表面積

$$\text{表面積} = \text{底面積} + \text{側面積} = 9\pi + 15\pi = 24\pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

したがって、求める立体の表面積は $24\pi \text{ cm}^2$ です。

(5)①

答え 10

4点

規則性から、 n 番目の図形における正方形の総数は、上から順に各段の正方形の数を足し合わせたものになります。

- ・ 1 段目：1 個
- ・ 2 段目：2 個
- ・ 3 段目：3 個
- ・ 4 段目：4 個

したがって、4 番目の図形の正方形の総数は、

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10 \text{ (個)}$$

となり、[ア] に当てはまる数は 10 です。

(5)②

答え $n^2 + 3n$

5点

まず、[イ] に当てはまる「横向きの手」の総数を n を用いて表します。

会話文より、横向きの手の本数は、

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n + n$$

と表されます。

1 から n までの和は $\frac{1}{2}n(n+1)$ であるため、これに最後の n を加えると、

$$\text{横向きの手の本数} = \frac{1}{2}n(n+1) + n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n$$

なり、[イ] に入る式は $\frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n$ です。

次に、[ウ] に当てはまる「全体の手の本数」を求めます。

全体の手の本数は、「縦向きの手の本数」と「横向きの手の本数」の和です。

縦向きの手の本数は、会話文より $\frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n$ 本です。

したがって、全体の手の本数 [ウ] は、

$$\text{全体の手の本数} = \left(\frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n \right) + \left(\frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n \right) = n^2 + 3n$$

(検算：

- ・ $n = 1$ のとき： $1^2 + 3(1) = 4$ 本
- ・ $n = 2$ のとき： $2^2 + 3(2) = 10$ 本
- ・ $n = 3$ のとき： $3^2 + 3(3) = 18$ 本

となり、問題文の冒頭にある本数と完全に一致します)

3 一次関数

(1) 答え (4, 4)

5点

2つの直線の式を連立方程式として解くことで、交点 A の座標を求めることができます。

求める連立方程式は以下の通りです。

$$\begin{cases} y = -2x + 12 & \cdots \textcircled{1} \\ y = \frac{1}{2}x + 2 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

①、②の右辺を等しいとおくと、

$$-2x + 12 = \frac{1}{2}x + 2$$

両辺を2倍して分母を払います。

$$-4x + 24 = x + 4$$

$$-5x = -20$$

$$x = 4$$

$x = 4$ を①に代入して y 座標を求めます。

$$y = -2 \times 4 + 12 = 4$$

したがって、交点 A の座標は $(4, 4)$ となります。

(2)

答え $t = \frac{12}{5}, \frac{28}{5}$

5点

点 P の x 座標は t ($0 < t < 6$) です。

点 R は直線 $l: y = -2x + 12$ 上の点なので、座標は $R(t, -2t + 12)$ と表せます。

点 S は直線 $m: y = \frac{1}{2}x + 2$ 上の点なので、座標は $S(t, \frac{1}{2}t + 2)$ と表せます。

また、直線 m の y 切片は 2 なので、点 C の座標は $C(0, 2)$ です。

ここで、 $\triangle COS$ と $\triangle ORS$ の面積について考えます。

• $\triangle COS$ の面積

OC を底辺とみると、 $OC = 2$ です。高さは点 S の x 座標の絶対値 ($t > 0$ より t) となるので、

$$\triangle COS = \frac{1}{2} \times 2 \times t = t$$

• $\triangle ORS$ の面積

RS を底辺とみると、高さは原点 O から直線 RS (直線 $x = t$) までの距離、すなわち t となります。よって、

$$\triangle ORS = \frac{1}{2} \times RS \times t$$

条件より、 $\triangle COS : \triangle ORS = 1 : 2$ であるから、

$$\triangle ORS = 2\triangle COS$$

$$\frac{1}{2} \times RS \times t = 2t$$

$t > 0$ であるから、両辺を t で割ると、

$$\frac{1}{2}RS = 2 \implies RS = 4$$

(※幾何学的に「2つの三角形は高さ t が共通なので、面積の比は底辺の比 $OC : RS$ に等しい」と考えて、 $2 : RS = 1 : 2$ より $RS = 4$ を直接導いてもかまいません。)

線分 RS の長さが 4 となる t の値を、交点 A の x 座標である 4 を境にして場合分けして求めます。

(i) $0 < t < 4$ のとき直線 l が直線 m より上側にあるので、 R の y 座標の方が S の y 座標より大きくなります。

$$RS = (-2t + 12) - \left(\frac{1}{2}t + 2\right) = -\frac{5}{2}t + 10$$

これが 4 に等しいので、

$$-\frac{5}{2}t + 10 = 4$$

$$-\frac{5}{2}t = -6 \implies t = \frac{12}{5}$$

これは $0 < t < 4$ を満たします。

(ii) $4 \leq t < 6$ のとき直線 m が直線 l より上側にあるので、 S の y 座標の方が R の y 座標より大きくなります。

$$RS = \left(\frac{1}{2}t + 2\right) - (-2t + 12) = \frac{5}{2}t - 10$$

これが 4 に等しいので、

$$\frac{5}{2}t - 10 = 4$$

$$\frac{5}{2}t = 14 \implies t = \frac{28}{5}$$

これは $4 \leq t < 6$ を満たします。

以上より、求める t の値は $t = \frac{12}{5}, \frac{28}{5}$ です。

4 平面図形

(1)

答え 【証明】

7点

$\triangle OED$ と $\triangle OFB$ において、
長方形の対辺は平行だから、 $AD \parallel BC$ 。

平行線の錯角は等しいから、

$$\angle OED = \angle OFB \text{ —— ①}$$

$$\angle ODE = \angle OBF \text{ —— ②}$$

また、長方形の対辺は等しいから、 $AD = BC$ —— ③

仮定より、 $AE = CF$ —— ④

③、④より、

$$ED = AD - AE$$

$$BF = BC - CF$$

であるから、

$$ED = BF \text{ —— ⑤}$$

①、②、⑤より、1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから、

$$\triangle OED \equiv \triangle OFB$$

長方形の性質と平行線の錯角を利用して合同を証明します。

- 平行線の錯角:

長方形 $ABCD$ において、向かい合う辺は平行なので $AD \parallel BC$ です。平行線の錯角は等しいことから、 $\angle OED = \angle OFB$ と $\angle ODE = \angle OBF$ が導かれます。

- 辺の長さの等しさ:

長方形の向かい合う辺の長さは等しいので $AD = BC$ です。仮定の $AE = CF$ を用いると、残りの部分である ED と BF も等しくなることが示せます ($ED = AD - AE$ 、 $BF = BC - CF$ より)。

- 合同条件の適用:

「1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しい」という合同条件を満たすため、 $\triangle OED \equiv \triangle OFB$ が成り立ちます。

(2)①

答え 116

5点

角度の性質と三角形の合同を利用して段階的に求めます。

• $\angle ADB$ の計算:

長方形の角は 90° なので、直角三角形 ABD において、

$$\angle ADB = 90^\circ - \angle ABD = 90^\circ - 32^\circ = 58^\circ \text{ です。}$$

• $\triangle EOD \equiv \triangle EOB$ の証明:

(1)の合同より、対応する辺は等しいので $OD = OB$ です。

また、線分 EF と対角線 BD は垂直に交わるので $\angle EOD = \angle EOB = 90^\circ$ です。

共通な辺 $EO = EO$ と合わせると、2組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので、 $\triangle EOD \equiv \triangle EOB$ が成り立ちます。

• 二等辺三角形の利用:

合同な三角形の対応する辺は等しいので $ED = EB$ となり、 $\triangle EDB$ は二等辺三角形です。

よって、 $\angle EBD = \angle EDB = \angle ADB = 58^\circ$ となります。

• ひし形の性質の利用:

同様に、 $\triangle FOD \equiv \triangle FOB$ も成り立つため $FD = FB$ です。

(1)より $ED = FB$ なので、4つの辺がすべて等しくなり、四角形 $EBFD$ はひし形になります。

ひし形の対角線は角を二等分するため、 $\angle FDB = \angle EDB = 58^\circ$ です。

したがって、

$$\angle EDF = \angle EDB + \angle FDB = 58^\circ + 58^\circ = 116^\circ \text{ となります。}$$

(2)②

答え 30

6点

【求め方の説明】

(1)より $\triangle OED \equiv \triangle OFB$ なので、対応する辺は等しく $OD = OB$ である。

よって、点 O は長方形 $ABCD$ の対角線 BD の中点（対称の中心）に一致する。

したがって、点 O から辺 AD への距離は長方形の縦の長さ（ CD ）の $\frac{1}{2}$ であり、 $\triangle OAD$ の面積は長方形 $ABCD$ の面積の $\frac{1}{4}$ となる。

$$\triangle OAD = 120 \times \frac{1}{4} = 30 \text{ cm}^2$$

同様に、 $\triangle OCD = 30 \text{ cm}^2$ である。

$AE = \frac{1}{4}AD$ より $ED = \frac{3}{4}AD$ なので、高さが共通な三角形の面積比より、

$$\triangle OED = \frac{3}{4}\triangle OAD = \frac{3}{4} \times 30 = 22.5 \text{ cm}^2$$

よって、四角形 $OEDC$ の面積は、

$$\text{四角形 } OEDC = \triangle OED + \triangle OCD = 22.5 + 30 = 52.5 \text{ cm}^2$$

次に、角 D は直角なので、 $\triangle EDG$ は $\angle EDG = 90^\circ$ の直角三角形である。

$ED = \frac{3}{4}AD$ 、また G は CD の中点なので $DG = \frac{1}{2}CD$ である。

よって、 $\triangle EDG$ の面積は、

$$\triangle EDG = \frac{1}{2} \times ED \times DG = \frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{4}AD\right) \times \left(\frac{1}{2}CD\right) = \frac{3}{16} \times (AD \times CD)$$

$AD \times CD$ は長方形 $ABCD$ の面積（ 120 cm^2 ）に等しいから、

$$\triangle EDG = \frac{3}{16} \times 120 = 22.5 \text{ cm}^2$$

求める四角形 $OECG$ の面積は、四角形 $OEDC$ から $\triangle EDG$ を除いたものであるから、

$$\text{四角形 } OECG = \text{四角形 } OEDC - \triangle EDG = 52.5 - 22.5 = 30 \text{ cm}^2$$

（答え）30